ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THU

VỀ MÔĐUN COHEN-MACAULAY DÃY

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THU

VỀ MÔĐUN COHEN-MACAULAY DÃY

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số

Mã số: 604. 601. 04

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. NGUYỄN TỰ CƯỜNG

THÁI NGUYÊN - 2016

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi xin cam đoan mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 04 năm 2016

Tác giả

Nguyễn Thị Thu

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành vào tháng 03/2016 dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường. Tôi xin được bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới thầy, những bài học quý giá từ trang giấy và cả những bài học trong cuộc sống thầy dạy giúp tôi tự tin hơn và trưởng thành hơn nhiều.

Tôi xin cảm ơn Phòng Sau đại học - Đại học sư phạm Thái nguyên đã tạo điều kiện để tôi hoàn thành sớm khóa học.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới tất cả các thầy cô ở Đại học Thái Nguyên và các thầy ở Viện toán với những bài giảng đầy nhiệt thành và tâm huyết, xin cảm ơn các thầy cô đã luôn quan tâm và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập, tạo điều kiện cho tôi tham gia các buổi xemina và các lớp học ngoài chương trình.

Tôi xin cảm ơn tất cả các anh em bạn bè nghiên cứu sinh đã động viên giúp đỡ tôi nhiệt tình trong quá trình học và làm luận văn.

Tôi xin được gửi cảm ơn tới tất cả thành viên trong gia đình đã tạo điều kiện cho tôi được học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Mục lục

Lời nói đầu

Luận văn trình bày về môđun Cohen-Macaulay dãy và sử dụng tài liệu tham khảo chính là bài báo [5]: N. T. Cường and D. T. Cuong (2007), "On Sequentialy Cohen-Macaulay Modules", *Kodal Math. J.*, **30**, 409-428. Nội dung của luận văn bao gồm: Định nghĩa và các tính chất cơ bản của lọc chiều, hệ tham số tốt; định nghĩa và tính chất cơ bản của môđun Cohen-Macaulay dãy, đặc trưng của lớp môđun này với đầy đủ chứng minh.

Khái niệm về môđun Cohen-Macaulay dãy được giới thiệu đầu tiên bởi Stanley trong [11] cho vành phân bậc. Tương tự, các tác giả hai bài báo [6] và [9] định nghĩa Môđun Cohen-Macaulay dãy trên vành địa phương. Cho M là môđun hữu hạn sinh trên vành Noether địa phương R với $\dim M = d$. Môđun M được gọi là môđun Cohen-Macaulay dãy nếu tồn tại một lọc các môđun con của M

$$\mathcal{D} : D_0 \subset D_1 \subset ... \subset D_t = M$$

sao cho mỗi môđun D_i/D_{i-1} là Cohen-Macaulay và

$$0 < \dim D_1/D_0 < \dim D_2/D_1 < ... < \dim D_t/D_{t-1} = d.$$

Khi đó lọc $\mathcal{D}$ ở trên được gọi là lọc Cohen-Macaulay. Lọc này xác định duy nhất và trùng với lọc chiều của M ([6], Bổ đề 4.4 (ii)). Lọc chiều của M được định nghĩa như sau: Một lọc $\mathcal{D}$ của M được gọi là lọc chiều nếu thỏa mãn hai tính chất: $D_0 = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ (đối đồng điều địa phương thứ 0 của M ứng với giá iđêan cực đại $\mathfrak{m}$) và D_{i-1} là môđun con lớn nhất của D_i thỏa mãn $\dim D_{i-1} < \dim D_i$ với mọi $i = t, t-1, ..., 1$. ([5], Định nghĩa 2.1).

Nếu $t = 1$, khi đó M là môđun Cohen-Macaulay dãy nếu và chỉ nếu $\ell_R(D_0) < \infty$ và D_1/D_0 là Cohen-Macaulay. Theo lý thuyết về bội thì trong trường hợp này M là Cohen-Macaulay dãy nếu và chỉ nếu tồn tại hệ tham số tốt $\underline{x} = (x_1, ..., x_d)$ của M sao cho $\ell(M/\underline{x}M) = \ell_R(D_0) + e(\underline{x}; D_1)$. Trong đó hệ tham số tốt $\underline{x} = (x_1, ..., x_d)$ của M được định nghĩa là hệ tham số tốt ứng với lọc chiều

$$\mathcal{D} : D_0 \subset D_1 \subset ... \subset D_t = M$$

của M, tức là $D_i \cap (x_{d_i+1}, ..., x_d)M = 0$, với mọi $i = 0, 1, ..., t-1$ ([5], Định nghĩa 2.2). Ta biết rằng với môđun N hữu hạn sinh trên một vành Noether địa phương, $\underline{y}$ là một hệ tham số của N thì N là Cohen-Macaulay nếu và chỉ nếu $\ell(N/\underline{y}N) = e(\underline{y}; N)$ ([3], Định lý 4.7.10). Đối với môđun Cohen-Macaulay dãy trong [4] đã chỉ ra rằng nếu M là môđun Cohen-Macaulay dãy thì $\ell(M/\underline{x}M) = \sum_{i=0}^{t} e(x_1, ..., x_{d_i}; D_i)$. Câu hỏi đặt ra rằng các khẳng định sau có đúng không.

1) M là môđun Cohen-Macaulay dãy nếu và chỉ nếu với mọi hệ tham số tốt $\underline{x} = (x_1, ..., x_d)$ của M thì $\ell(M/\underline{x}M) = \sum_{i=0}^{t} e(x_1, ..., x_{d_i}; D_i)$ với mọi $i = 0, ..., t$, với $d = \dim M$ và $d_i = \dim(D_i)$.

2) M là môđun Cohen-Macaulay dãy nếu và chỉ nếu với một hệ tham số tốt $\underline{x} = (x_1, ..., x_d)$ của M thì $\ell(M/\underline{x}M) = \sum_{i=0}^{t} e(x_1, ..., x_{d_i}; D_i)$ với mọi $i = 0, ..., t$, với $d = \dim M$ và $d_i = \dim(D_i)$.

Bài báo [5] đã chứng minh được khẳng định thứ nhất là đúng (xem Định lý 2.3.2), khẳng định thứ hai nói chung không đúng (xem Ví dụ 2.3.7).

Luận văn được chia làm hai chương:

Chương 1: Chương này nhắc lại một số kiến thức được dùng trong chương tiếp theo: Chiều Krull của vành và môđun, hệ tham số và bội, phức Koszul và đồng điều Koszul, môđun Cohen-Macaulay.

Chương 2: Chương này gồm ba phần. Phần một nói về lọc chiều và hệ tham số tốt. Phần hai trình bày tính chất của môđun Cohen-

Macaulay dãy, dd-dãy và chứng minh đặc trưng thứ nhất của môđun Cohen-Macaulay dãy. Phần ba đưa ra câu trả lời cho các câu hỏi được đặt ra ở trên (Định lý 2.3.2 và Định lý 2.3.3).

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Chiều Krull của vành và môđun

Định nghĩa 1.1.1. Cho R là vành giao hoán.

(i) Một dãy giảm các iđêan nguyên tố của R

$$P_0 \supsetneq P_1 \supsetneq \dots \supsetneq P_n$$

được gọi là *một xích nguyên tố độ dài n*.

(ii) Cho P là một iđêan nguyên tố của R. Cận trên của tất cả các độ dài của xích nguyên tố với $P_0 = P$ được gọi là *độ cao* của P, kí hiệu là $\mathrm{ht}(P)$. Nghĩa là:

$$\mathrm{ht}(P) = \sup\{\text{độ dài của các xích nguyên tố với } P_0 = P\}.$$

Cho I là iđêan của R, ta định nghĩa *độ cao* của iđêan I là

$$\mathrm{ht}(I) = \inf\{\mathrm{ht}(P) | P \in \mathrm{Spec}(R), P \supseteq I\}.$$

(iii) Cận trên của tất cả các độ dài của xích nguyên tố trong R được gọi là *chiều Krull của vành R*, kí hiệu là $\dim R$. Ta có

$$\dim R = \sup\{\mathrm{ht}(P) | P \in \mathrm{Spec}(R)\}.$$